OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA, 18 FEBRUARIE 2012
CLASA A X-A

Subiectul 1

a) Fie ε o radacina a ecuatiei $x^2 - x + 1 = 0$. Aratati ca numerele complexe distincte oricare doua z_1, z_2, z_3 sunt afixele varfurilor unui triunghi echilateral daca si numai daca are loc relatia: $z_1 - \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$.
b) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq b \neq c \neq a$ astfel incat $(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$. Aratati ca $a, b, c \in \mathbb{C}$ reprezinta afixele varfurilor unui triunghi echilateral.

Subiectul 2

Aratati ca daca $z \in \mathbb{C}, |z^2 + 1| = 2|z + 1|$, atunci $|z| \leq \sqrt{7}$.

Subiectul 3

a) Determinati $a \in \mathbb{R}$ astfel incat numarul $\frac{1-i}{a+(a-2)i}$ sa fie real.
b) Demonstrati ca pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, este adevarata inegalitatea:

$$\log_{n!}^2 n + \log_{n!}^2 (n-1) + \log_{n!}^2 (n-2)! > \frac{1}{3}$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Subiectul 4

Demonstrati ca daca $a, b, c > 1$, atunci:

a) $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$
b) $\log_2(a+b) + \log_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2$

Nota:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru 3 ore.
- Se acorda pentru fiecare subiect puncte de la 0 – 7.